



## Logica Booleana e Circuiti

Walter Cazzola

Dipartimento di Informatica e Comunicazione  
Università degli Studi di Milano



## Logica Booleana

### Variabili Proposizionali

- Sono degli oggetti che possono assumere uno e uno solo tra i due valori di verità VERO (o True, o 1) e FALSO (o False, o 0).
- Nel seguito le indicheremo usando le lettere minuscole dell'alfabeto latino, mentre useremo i simboli "1" e "0" per indicare i valori di verità.



## Logica Booleana

### Connettivi e Formule

- I connettivi indicano operazioni logiche tra variabili proposizionali:
  - congiunzione (e, and,  $\wedge$ )
  - disgiunzione (o, or,  $\vee$ )
  - negazione (non, not,  $\neg$ )
- Utilizzando variabili e connettivi (e rispettando opportune regole di sintassi) è possibile costruire formule booleane.



## Logica Booleana

### Tavole di Verità

- Sintetizzano i valori assunti da una formula booleana al variare dei possibili assegnamenti di valori di verità per le variabili proposizionali che compaiono nella formula stessa.
- Hanno tante righe quanti sono i possibili assegnamenti ( $2$  elevato al numero di variabili), mentre il numero di colonne dipende dalla complessità della formula.





# Logica Booleana

Logica Booleana e Circuiti  
Walter Cazzola

Logica Booleana  
Valori Proposizionali  
Connettivi, Formule e Tavole di Verità  
Mappe di Karnaugh  
Circuiti Logici  
Nozioni Generali

## Tavole di Verità

### Congiunzione

A	b	A∧b
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

### Disgiunzione

A	b	A∨b
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

### Negazione

A	¬A
0	1
1	0

Nota. True = 1, False = 0.



# Logica Booleana

Logica Booleana e Circuiti  
Walter Cazzola

Logica Booleana  
Valori Proposizionali  
Connettivi, Formule e Tavole di Verità  
Mappe di Karnaugh  
Circuiti Logici  
Nozioni Generali

## Implicazione

Chiamiamo implicazione tra A e b il risultato della formula  $(\neg A \vee b)$ .

Per brevità la formula è associata ad un connettivo rappresentato dal simbolo  $\rightarrow$ .

A	b	¬A	¬A∨b
0	0	1	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	1	0	1

$A \rightarrow b$  è vera A meno che A sia vero e b sia falso.



# Logica Booleana

Logica Booleana e Circuiti  
Walter Cazzola

Logica Booleana  
Valori Proposizionali  
Connettivi, Formule e Tavole di Verità  
Mappe di Karnaugh  
Circuiti Logici  
Nozioni Generali

$$f = (A \rightarrow b) \wedge (b \rightarrow A).$$

A	b	A→b	b→A	f
0	0	1	1	1
0	1	1	0	0
1	0	0	1	0
1	1	1	1	1

$$f = ((A \rightarrow b) \wedge A) \rightarrow b.$$

A	b	A→b	(A→b)∧A	f
0	0	1	0	1
0	1	1	0	1
1	0	0	0	1
1	1	1	1	1

Nota. f è una tautologia.



# Logica Booleana

Logica Booleana e Circuiti  
Walter Cazzola

Logica Booleana  
Valori Proposizionali  
Connettivi, Formule e Tavole di Verità  
Mappe di Karnaugh  
Circuiti Logici  
Nozioni Generali

Un Esercizio. Tavola di Verità per  $(A \wedge b) \vee \neg c.$

A	b	c	¬c	A∧b	(A∧b)∨¬c
0	0	0	1	0	1
0	0	1	0	0	0
0	1	0	1	0	1
0	1	1	0	0	0
1	0	0	1	0	1
1	0	1	0	0	0
1	1	0	1	1	1
1	1	1	0	1	1





# Logica Booleana

Logica Booleana e Circuiti  
Walter Cazzola

Logica Booleana  
Valori Proposizionali  
Connessioni, Formule e Tavole di Verità  
Mappe di Karnaugh  
Circuiti Logici  
Nozioni Generali

Dalla Tavola di Verità alla Formula.

A	b	c	f
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

## Algoritmo di Karnaugh

Per ogni riga  $i$  per cui  $f$  vale 1:

- per ogni variabile  $v$  la considero:
  - negata se l'input è 0;
  - non negata altrimenti;
- $f_i$  è la congiunzione ( $\wedge$ ) degli input;

$f$  è la disgiunzione ( $\vee$ ) degli  $f_i$  costruiti.

Quale formula calcola  $f$ ?

$$(\neg A \wedge \neg b \wedge \neg c) \vee (A \wedge \neg b \wedge \neg c) \vee (A \wedge b \wedge c)$$



# Circuiti Logici

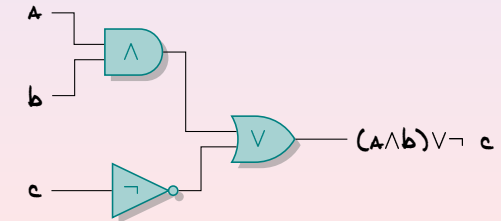
Logica Booleana e Circuiti  
Walter Cazzola

Logica Booleana  
Valori Proposizionali  
Connessioni, Formule e Tavole di Verità  
Mappe di Karnaugh  
Circuiti Logici  
Nozioni Generali

Sono particolari rappresentazioni di formule booleane, tramite le seguenti porte logiche:



Esempio di circuito.

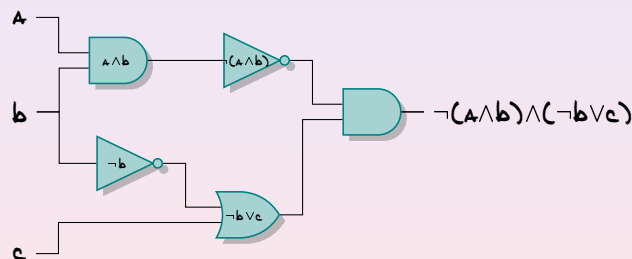


# Circuiti Logici

Logica Booleana e Circuiti  
Walter Cazzola

Logica Booleana  
Valori Proposizionali  
Connessioni, Formule e Tavole di Verità  
Mappe di Karnaugh  
Circuiti Logici  
Nozioni Generali

Un altro esempio di circuito.



# Circuiti Logici

Logica Booleana e Circuiti  
Walter Cazzola

Logica Booleana  
Valori Proposizionali  
Connessioni, Formule e Tavole di Verità  
Mappe di Karnaugh  
Circuiti Logici  
Nozioni Generali

Tavola di Verità per  $\neg(A \wedge b) \wedge (\neg b \vee c)$ .

A	b	c	$A \wedge b$	$\neg(A \wedge b)$	$\neg b$	$\neg b \vee c$	$\neg(A \wedge b) \wedge (\neg b \vee c)$
0	0	0	0	1	1	1	1
0	0	1	0	1	1	1	1
0	1	0	0	1	0	0	0
0	1	1	0	1	0	1	1
1	0	0	0	1	1	1	1
1	0	1	0	1	1	1	1
1	1	0	1	0	0	0	0
1	1	1	1	0	0	1	0

